В начале курса оптики мы искали решения уравнений Максвелла и рассмотрели два ЧАСТНЫХ случая:

1) Возмущение f зависит только от одной координаты – z. В этом случае $f(\mathbf{r},t)=f(z,t)$.

А в любой плоскости, перпендикулярной OZ, возмущение одинаково.

2) Возмущение f зависит только от модуля радиус-вектора, то есть f является функций только двух величин: r и t. В этом случае

$f(\mathbf{r},t)=f(r,t)$.

А на любой сфере с центром в источнике возмущение одинаково.

Сейчас же мы рассмотрим более общий случай – рассмотрим все четыре аргумента: x, y, z, t. Правда, сделаем на сей раз другое допущение: что волна монохроматическая, т.е.

$$U(x,y,z,t)=U(x,y,z)e^{i\omega t},$$

Где U – любая из проекций на любую ось E, B, D или H. Это может быть E_x, B_y и т.п.

Если подставить такое U в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\Delta U,$$

то после сокращения на $e^{i\omega t}$ получается *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta U+k^2U=0,$$

где $k^2=\omega^2/c^2$.

Отметим очень важный плюс последнего уравнения: мы избавились от времени. Совсем. Треугольник слева – это лапласиан, это частные производные второго порядка по координатам, они на месте. А вот времени нет.

В дальнейшем под U будем понимать… хз, как это называется в научной литературе, но я буду это называть «фазовая амплитуда» - возмущение в точке (x, y, z) в нулевой момент времени.

Также под U для простоты будем поднимать амплитуду проекции напряжённости на какую-то ось. Понятно, чтобы найти напряжённость в любой точке пространства, нам потребуется 3 уравнения Гельмгольца – для каждой из осей.

Решение уравнения Гелемгольца –

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Где G – функция Грина, она получается из другого уравнения, но решений у неё бесконечного много.

$$G = \frac{1}{\rho}e^{-ik\rho},$$

Один из вариков –

Тогда после подстановки получим.

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) - \left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right)\frac{\partial U}{\partial n}\right]d\sigma.$$

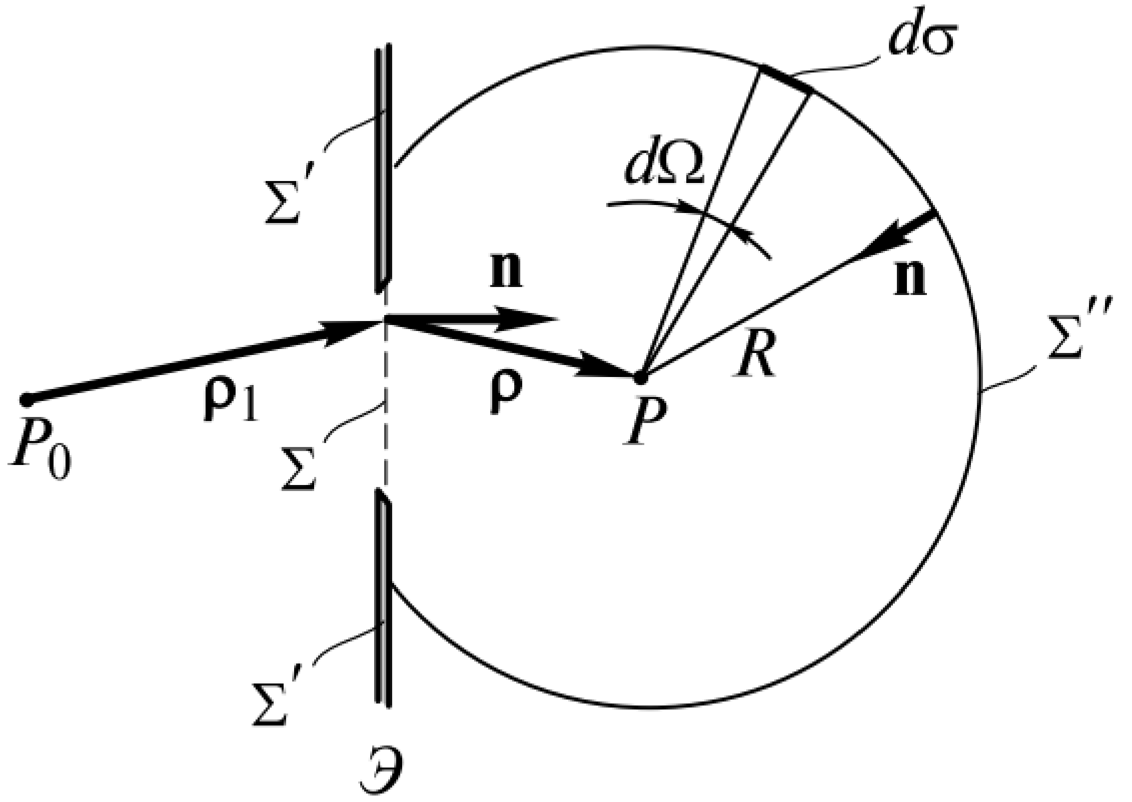
То есть если мы знаем значение U в любой точке какой-то поверхности Σ, то мы можем найти фазовую амплитуду в точке P внутри неё! Тут просто напрашивается аналогия с интегралом Коши из ТФКП.

Вопрос, который возникает у вас: а откуда мы знаем U на поверхности? А это граничные условия, которые нам должны быть заданы. U(x,y,z) имеет 3 степени свободы, уравнение Гельмгольца съело одну, вот и осталось две – координаты на этой поверхности.

Таким образом, если у нас светящийся экран-замкнутая поверхность Σ, где мы можем создать какие-то определённую U, то мы найдём U в любой точке внутри него в любой момент времени интегралом по этой поверхности. Согласитесь, попахивает принципом Гюйгенса-Френеля о том, что каждая точка вносит свой вклад!

(Здесь, однако, нужно сделать замечание: экран должен быть не сферой, которая увешана лампами, а поверхностью в вакууме. Во-первых, потому что все наши уравнения записаны для вакуума, во-вторых, уравнения Максвелла в принципе не очень дружат с источниками э/м волн – вспомните сферическую волну, где все величины в точке источника улетали на бесконечность. Это связано с тем, что в уравнениях Максвелла у нас есть заряды и токи, пусть даже элементарные и точечные, а вот элементарного источника волн нет. Дело в том, что элементарный источник волн – это кольцо с током (т.н. магнитный диполь), точечным, с точки зрения уравнений Максвелла, быть не может).

Перейдём к опыту с прохождением света через отверстие. Окружим P – точку наблюдения, сферой:



Начнём считать интеграл выше по этой поверхности. Сразу заметим, что интеграл по Σ” даст 0, потому что… потому что не будем объяснять, это сложно, поверим на слово. Так что останется только интеграл по Σ. Для начала найдём фазовую амплитуду в дырке Σ:

$$\frac{Ce^{-ik\rho_1}}{\rho_1}.$$

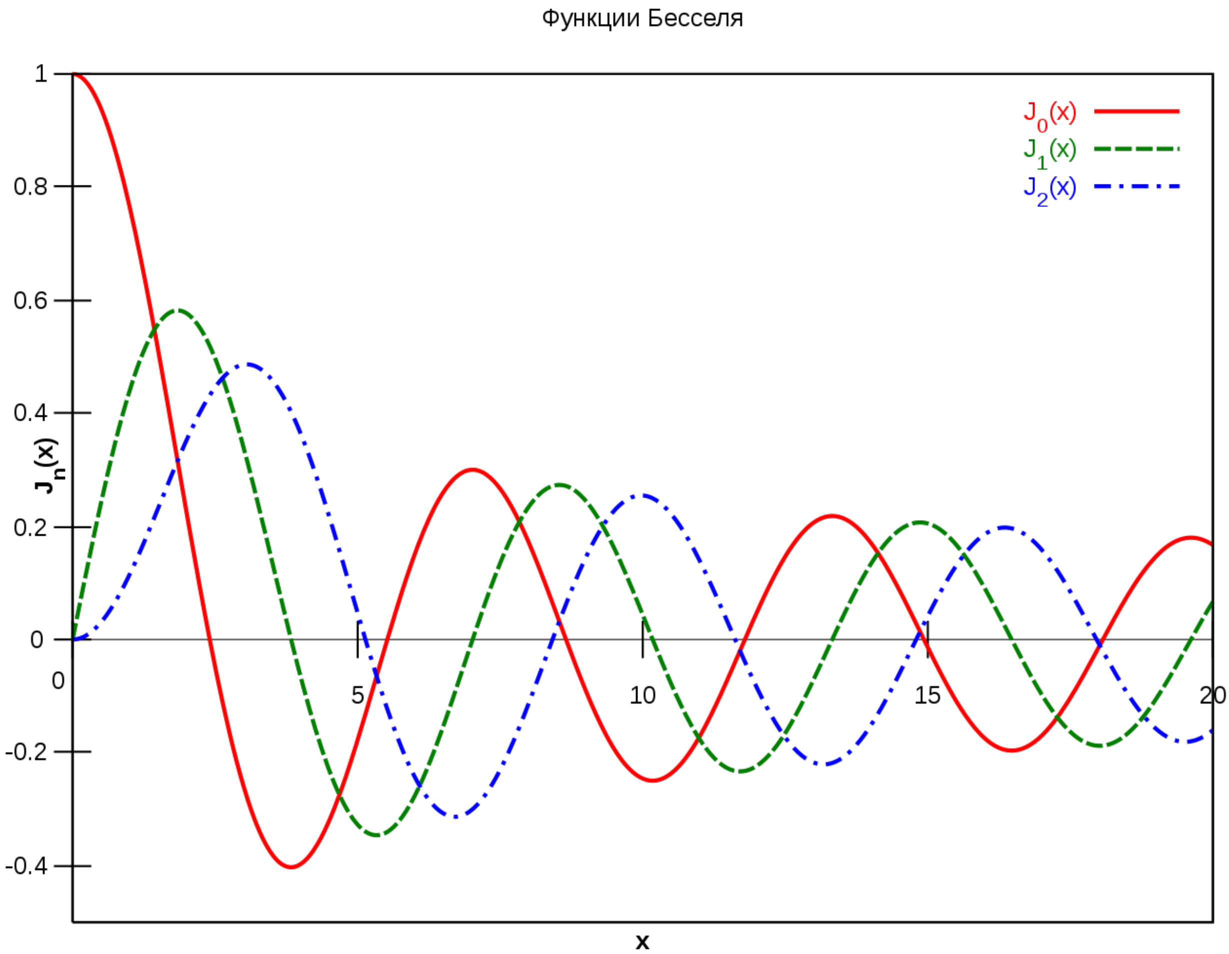
- где C – константа, зависящая от мощности источника.

- Стоп-стоп! – скажете вы. – Ты хитрец, как ты так быстро нашёл амплитуду в отверстии? Ты что, считал, что свет распространялся до этого сферической волной? То есть прямолинейно? А тут у нас дифракция, непрямолинейное распространение света. Так в каких случаях свет распространяется прямолинейно, а в каких нет?

Гениальный вопрос! Именно меня он в своё время заинтересовал. Ответ будет долгим, но содержательным. А сначала решим задачу, казалось бы, из другой оперы.

Задача: пусть у нас есть плоскость OXY, в которой мы всё контролируем и способны создавать любую фазовую амплитуду в любом направлении. Нас интересует U(x,y,z) в любой точке пространства, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца. А дано нам, как граничное условие, U(x,y,0).

Если бы свет распространялся прямолинейно вдоль оси OZ, мы бы ожидали, что U(x,y,z) имеет вид U(x,y,0)*exp(-ikz). Действительно, после домножения на exp(iωt) мы бы получили знакомое U(x,y,0)*exp(-ikz+ iωt) – плоская волна! На самом деле оказывается, что для некоторых граничных условий U(x,y,0) так оно и есть – бежит плоская волна вдоль оси OZ. Например, это однородное поле U(x,y,0)=const. Но есть и менее тривиальный случай. Например, это так называемые бесселевы пучки, где U(x,y,0) имеют вид R(r)Φ(φ)= $C J_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)$.
Где $J_m()$ – m-тая функция Бесселя первого рода.
Графики первых трёх функций Бесселя для наглядности. Похожи на затухающие гармонические колебания:



Тогда U(x,y,z)= $C J_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)\exp(i\beta z)$.

(где к и β связаны условием $\kappa^2 = k^2 - \beta^2$)
Вдоль оси OZ пучок ведёт себя, как обычная волна: если мы exp(iβz) домножим на exp(iωt). А вдоль двигающейся плоскости, параллельной OXY он свою форму не меняет, просто он «сжимается» и «расжимается» в зависимости от величины exp(iβz). Но на бесконечность он не уходит.
А вот если U(x,y,0) изначально – не бесселев пучок $C J_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)$, то тут уже может произойти любая дичь. В том числе пучок может начать отклоняться, менять свою форму в плоскости XУ по мере её движения вдоль оси OZ (а не только размер, как в случае с бесселевым пучком).
Кстати, в волноводах, конечно, очень желательно, чтобы энергия зазря за пределы волновода не выходила, поэтому там нужно использовать бесселевы пучки. Тогда энергия будет оставаться в пределах волновода.
К сожалению, дать конкретный вид U(x,y,0), при которой пучок начнёт убегать от оси OZ, не могу. Вообще уравнение Гельмгольца аналитически решается только в самых простых случаях (это уравнение в частных производных второго порядка!). Но думаю, что подойдёт почти любое, помимо Бесселя и константы ☺
Вообще, мы чутка в ММФ зашли, вот там как раз всё это и будет.

Фул с бесселевым пучком: http://window.edu.ru/resource/849/27849/files/itmo156.pdf , страница 30

Получается, мы теперь в теме про дифракцию НИГДЕ не можем считать, что свет распространяется прямолинейно? Ну нет, кое-где можем. Где пучок «не поврёжден», его волновой фронт – константа, а не что-нибудь другое.
Так вот, до отверстия (вспомним наш опыт с прохождением света через дырку) наш пучок «не повреждён», на поверхности волнового фронта всё константно => можем считать, что свет распространяется прямолинейно и просто сфера «раздувается».
Но вот волновой фронт коснулся преграды. Всё, с этого момента он повреждён.
(замечание – «коснулся» надо воспринимать не как «в момент t он коснулся, т.к. все процессы у нас стационарные, а как «пришёл к преграде уже ПОСЛЕ того, когда шёл по радиусу сферы»).
Вообще в дифракции следует избегать зависимости от времени и лучше применять все термины к точкам в пространстве. Что мы сейчас и сделаем:
Итак, если плоскость отверстия – OXY, то во всех точках пространства, где аппликата z<0, свет неповерждённый, распространяется сферической волной.

Напротив, при z>0… А давайте вот такое соображение притащим: у нас же свет как течёт в обратную сторону, так и в обратную по той же траектории, реверс времени в оптике можно без труда сделать. Значит, по той же причине свет при z>0 распространяется прямолинейно сферической волной.
А вот в плоскости z=0 и происходит «ломка» волнового фронта! Что и вызывает его искривление.

Кстати, возможно, у кого-то возникнут вопросы: а если U на границе непрозрачного материала и отверстия испытывает скачок, то тогда ΔU равно бесконечности, а $k^2 \cdot U$ нет, как быть? Ну тут никакой проблемы быть не должно, просто заменяем скачок U на резкий, но всё же непрерывный переход, так, чтобы U и все первые производные были непрерывны.

Отметим и простой смысл того, что на близких расстояниях у нас работает геометрическая оптика:

Пусть точка наблюдения P находится далеко от краёв отверстия, но близко его плоскости. Тогда свету, испытавшего ломку на поверхности отверстия до точки P, пройти совсем недалеко, и возмущение волнового фронта, надвигающееся с краёв, просто не успеет дойти до того момента, когда луч из источника свет дойдёт до P.

Хорошо, а как всё-таки найти интенсивность в любой точке P? Тут уже действительно придётся уравнение Гельмгольца, как ни крути, решать. Вычислим производные U и G по нормали:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\right)\cos\varphi = \left(ik + \frac{1}{\rho}\right)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(C\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(C\frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}\right)\cos\varphi_1 = -C\left(ik + \frac{1}{\rho_1}\right)\frac{e^{-ik\rho}}{\rho_1}\cos\varphi_1,$$

После подстановки в

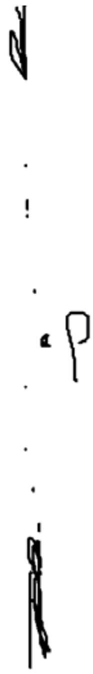
$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma.$$

получим:

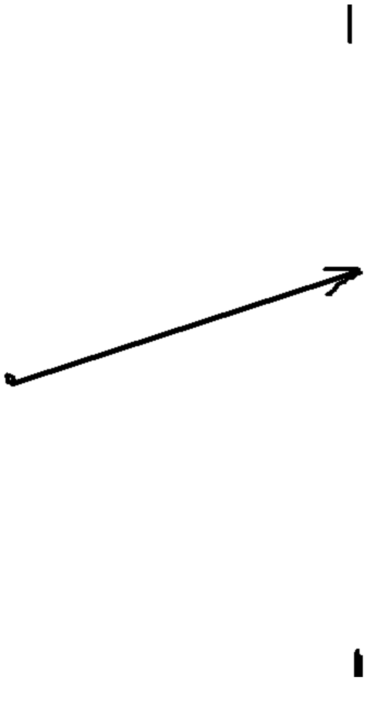
$$U(P) = \iint\limits_{\Sigma}\frac{Ce^{-ik(\rho_1+\rho)}}{\rho_1\rho}\frac{i}{2\lambda}\left[\cos\varphi_1 + \cos\varphi\right]d\sigma.$$

Если присмотреться к этому интегралу, тут принцип Гюйгенса-Френеля будет более явным: возмущение в P складывается от кучи точек на поверхности Σ.

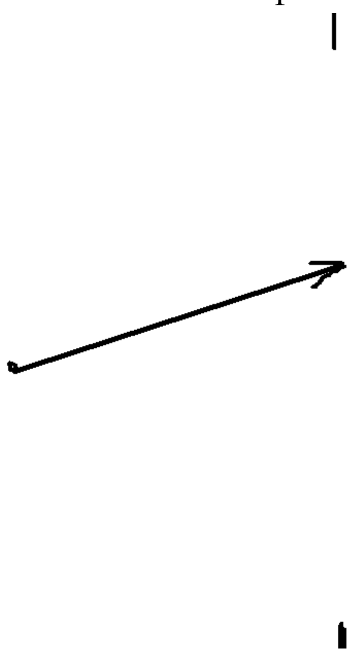
Ранее мы обсуждали, почему в таких точках P, близких к плоскости



отверстия и далеко от краёв отверстия
у нас выполняется геометрическая оптика: возмущение с краёв не успевает дойти, и до точки участок сферического фронта доходит целеньким. С точки же зрения интеграла Кирхгофа получим кучу возмущений от всех точек Σ, только они так сложатся, что в сумме останется только то, что должно быть по геометрической оптике. (Кстати, с точки зрения зон Френеля это случай, когда их очень много, и из-за этого дифракции в этой точке у нас не происходит).
С другой стороны, трудно понять, почему луч, идущий в центр в точку, расположенную далеко от краёв дырки



на поверхности отверстия он, которому, по идее должно быть пофиг на непрозрачный материал, который находится где-то далеко от неё, он внезапно расщепляется на континуальное число волн, некоторые из которых даже летят назад.
И первое, и второе связано с тем, что интеграл Кирхгофа – это некий «подгон»: оказывается, что U после плоскости можно считать так-то, как будто одновременно в плоскости OXY все точки становятся вторичными источниками, излучающими, пусть и неравномерно, во все стороны. По сути мы считаем интенсивность как интерференцию континуального числа вторичных когерентных источников. Происходит ли эта интерференция в реальности? Ну, с точки зрения уравнения Гельмгольца вам будет затруднительно даже ввести направление скорости волны в какой-либо точке. Представьте: вам задана U(x,y,z), подчиняющаяся уравнению Гельмгольца, нужно найти скорость волны в точке. Задача совсем неочевидная, кстати.
Тут напрашивается аналогия с дисперсией: там есть фазовая скорость и групповая, но групповая скорость имеет физический импульс (скорость передачи волнового пакета), а фазовая нет, и может запросто превосходить скорость света. Тем не менее, мы для неё вполне можем написать её уравнения. Здесь так же: уравнение для как бы интерференции, но в реальности её нет: фотоны лучей



летят прямо ещё некоторое время, пока до них не дойдёт возмущение от краёв, и дальше уже произойдёт хаос, а не становятся вторичными источниками ровно в плоскости отверстия. Только «реальность» нам фиг подсчитает U далеко от экрана, а вот «нефизичный» интеграл Кирхгофа – подсчитает.